Zur Zerlegung der Umgebung eines ebenen Bereichs in kongruente.

Von H. VODERBERG Greifswald

Mit 4 Figuren.

(Abschrift von Walter Trump, 2025-03-17)

Im Jahresbericht der D. M. V. (Deutsche Mathematiker Vereinigung) Band 44 (1934), S. 41, stellte Herr K. Reinhardt die folgende Aufgabe (Aufg. 170): In der Ebene grenzen zwei beschränkte (nicht konvexe) kongruente Bereiche (z. B. zwei einfache Polygone) von außen so aneinander, dass zwischen ihnen ein Loch bleibt. Es ist zu beweisen, dass dieses Loch nicht in zu den genannten kongruente Bereiche zerlegt werden kann. (Hineinlegen kann man mitunter einige.)

Die hierin enthaltene Vermutung ist tatsächlich nicht richtig, wie ich an einem Beispiel zeigen werde. Dieser gleich anzugebende Beispieltyp ist außer einem anderen nachweislich der einzige, der das Gewünschte bietet, falls zur Füllung nur ein Bereich in Betracht gezogen wird.

Unter "Bereich" sei ein einfach zusammenhängendes beschränkte Gebiet der (euklidischen) Ebene verstanden, dessen Rand eine Jordankurve ist. Zwei kongruente solche Bereiche B_1 und B_2 mögen von außen so aneinander grenzen, dass zwischen ihnen ein Loch bleibt, das einen Bereich B_0 bildet, und es soll untersucht werden, ob B_0 kongruent zu B_1 (bzw. B_2) sein kann. Auf dem Rand C_0 von B_0 gibt es zwei Punkte P und Q, die Randpunkte der Bereiche B_0, B_1, B_2 sind. Sie teilen C_0 in die beiden Bogen b_{01} und b_{02}, die abgesehen von P und Q nur Randpunkte von B_0 und B_1 bzw. von B_0 und B_2 enthalten.

Nun gilt folgender Hilfssatz: Grenzen zwei kongruente Bereiche B' und B'' längs eines Bogens PQ aneinander, so gehen B' und B'' entweder

a) durch Drehung um den Mittelpunkte der Strecke PQ durch den Winkel π ineinander über, wobei der Bogen PQ punktsymmetrisch mit M als Zentrum sein muss, oder

b) durch Spiegelung an der Geraden PQ, wobei der Bogen PQ mit der Strecke PQ zusammenfällt, oder

c) durch α) eine Drehung, β) eine Parallelverschiebung, γ) eine Gleitspiegelung, wobei der Bogen PQ auf B' (B'') einem echten Teilbogen des Komplementärbogens zu PQ auf B'' (B') entspricht, oder

d) durch eine Gleitspiegelung, wobei der Bogen PQ auf B' (B'') in einen Bogen R''S'' (R'S') auf B'' (B') übergeht, der genau einen der beiden Punkte P oder Q im Inneren enthält.

Dieser Hilfssatz kann bewiesen werden durch elementare Betrachtungen, indem man die vier Möglichkeiten ins Auge fasst, dass der Bogen PQ auf B' bei der Kongruenz einem (echten oder unechten) Teilbogen von PQ auf B'', einem (echten oder unechten) Teilbogen des Komplementärbogens von PQ auf B'', einem P oder Q im Inneren enthaltenden Bogen auf B'', einem sowohl P als auch Q im Inneren enthaltenden Bogen auf B'' entspricht.

Wendet man diesen Hilfssatz auf die Figur der drei Bereiche B_0, B_1, B_2 an, so kommt man zu dem Ergebnis, dass zwischen B_0 und B_1 der Fall a) oder d) und gleichzeitig zwischen B_0 und B_2 der Fall c, α) möglich ist. Alle anderen Kombinationen sind dagegen unmöglich. Dabei ist b_{01} ein punktsymmetrischer bzw. gleitsymmetrischer (*) Kurvenbogen und b_{02} einem Kurvenbogen kongruent, der echter Teilbogen von b_{01} ist.

(*) Vermutlich ein Fehler, weil im Fall d) wird b_{01} nicht auf sich selbst abgebildet.

Ein Polygon mit der geringsten Eckenzahl, das dem ersten Typ angehört, ist z. B. das in Fig. 1 angegebene Neuneck. Bei ihm ist das Randstück ABCDEF punktsymmetrisch mit dem Mittelpunkt M; das Stück AIHGF geht aus BCDEF durch Drehung um F durch den Winkel ε hervor. Drei Bereiche (A_0 ... I_0), (A_1 ... I_1), (A_2 ... I_2) kann ich wie verlangt zusammenlegen (Fig. 2). Dabei ist $A_0 = F_1 = B_2$, $B_0 = E_1$, $C_0 = D_1$, $D_0 = C_1$, $E_0 = B_1$, $F_0 = A_1 = F_2$, $G_0 = E_2$, $H_0 = D_2$, $I_0 = C_2$.

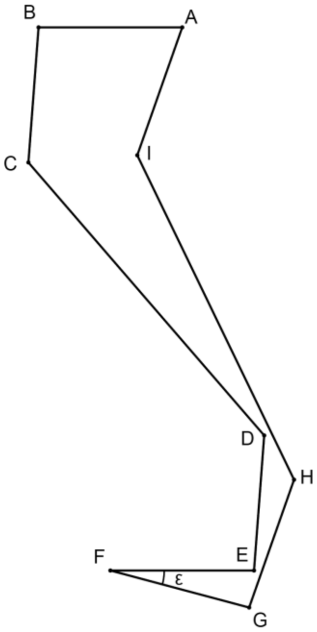

Fig. 1

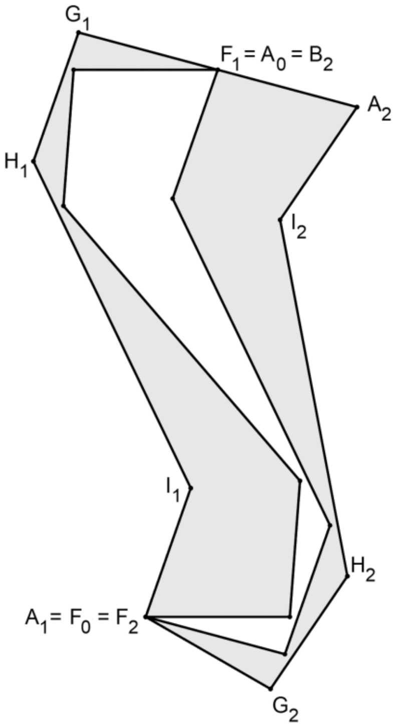

Fig. 2

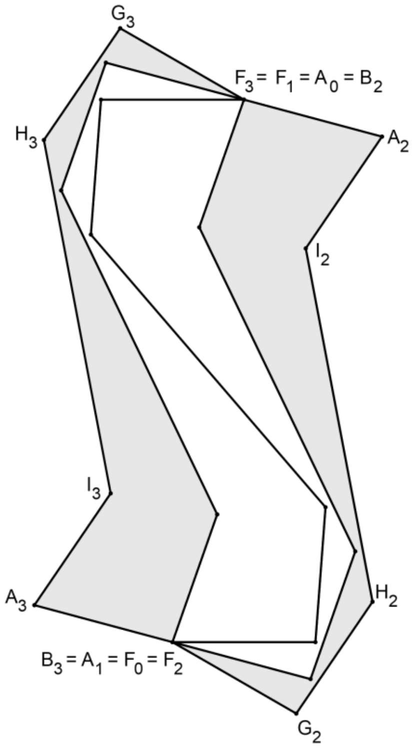

Fig. 3

Dieser Bereich besitzt noch folgende Eigenschaften. Es ist möglich, an (A_1 ... I_1) noch ein weiteres Neuneck (A_3 ... I_3) so grenzen zu lassen, dass (A_3 ... I_3) und (A_2 ... I_2) das Loch bilden, das von den beiden anderen Neunecken ausgefüllt wird (Fig. 3). Hier erscheint also ein solches Loch sogar in zwei zu den gegebenen kongruente Bereiche zerlegt.

Das Neuneck ist ferner Zerlegungsbereich im Reinhardtschen Sinne, d. h. es besitzt die Eigenschaft, dass man sogar die ganze Ebene in zu ihm kongruente Exemplare zerlegen kann. Neben der regelmäßigen Zerlegung, zu welcher es Anlass gibt, ist - unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen - die Zerlegung der ganzen Ebene in Form einer Spirale, wie sie Fig. 4 zeigt, besonders bemerkenswert.

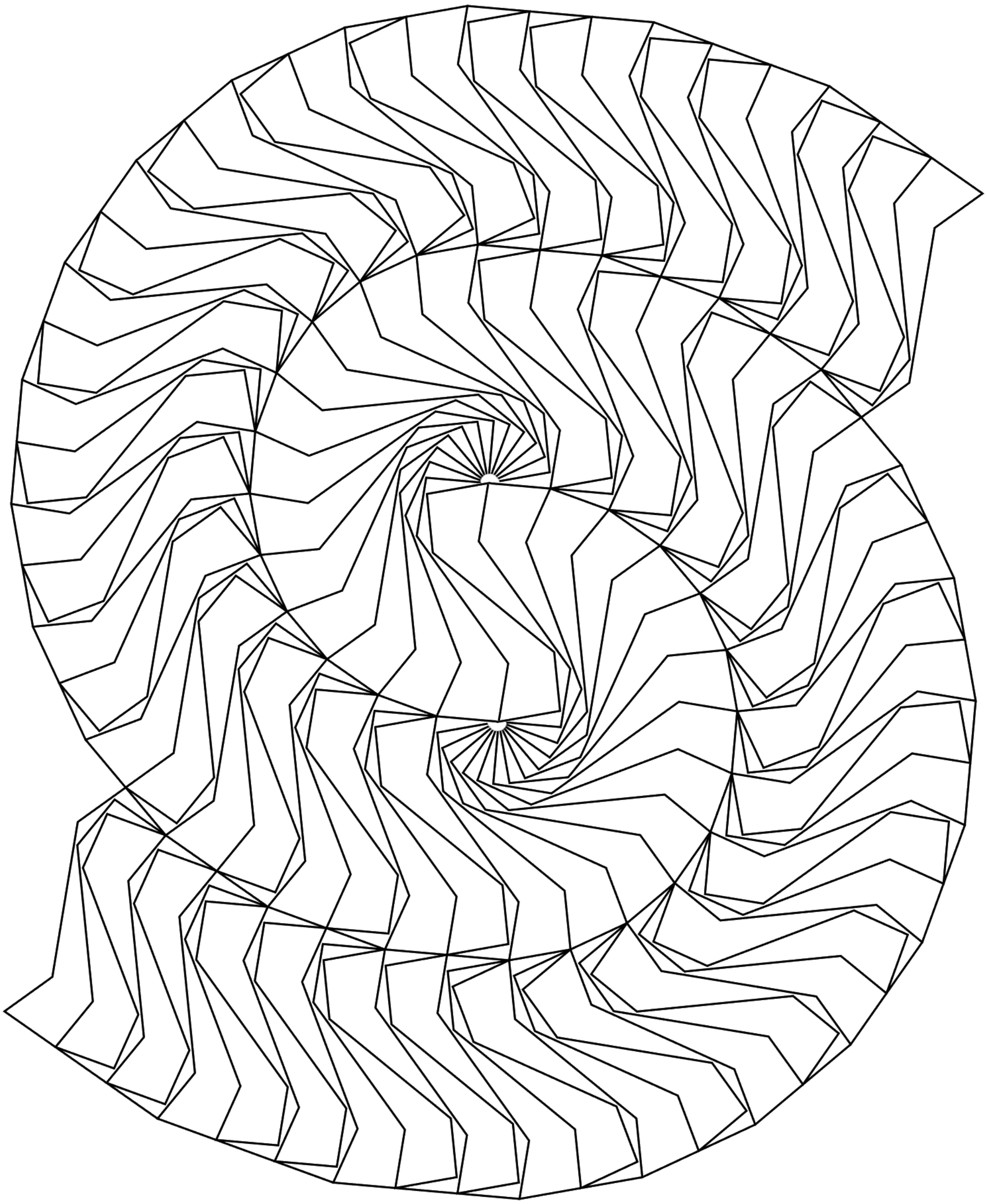

Fig. 4 $(\varepsilon = 15°)$

Diese Untersuchungen sind deshalb von weitergehendem Interesse, weil sie einen geringen Ausschnitt aus der Lösung des allgemeinen Parkettierungsproblems darbieten, d. h. des Problems, sämtliche Zerlegungsbereiche aus dem alleinigen Begriff der Zerlegung heraus aufzustellen, dessen vollständige Lösung eine im Entstehen begriffene Arbeit von Herrn Reinhardt und eine ergänzende Untersuchung des Verfassers, die in Bälde erscheinen wird, enthält.

(Eingegangen am 10. 6. 1936.)